Una construcción recursiva de proyectores canónicos mediante cadenas binarias no crecientes

Rodrigo Javier Mercado Rojas
rojamer.bsp@gmail.com
Investigador Independiente

16 de enero de 2026

Resumen

Este artículo presenta una construcción algebraico-combinatoria que establece una biyección explícita entre el conjunto F_n de cadenas binarias no crecientes de longitud n y la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Mediante una familia de funciones booleanas recursivas $f_{n,k}$, definimos transformaciones $H_n : F_n \to G_{n+1}$ que permiten expresar los proyectores coordenados $P_k^{(n+1)} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ como productos punto con vectores específicos derivados de cadenas binarias. La construcción revela una estructura recursiva natural y proporciona fórmulas cerradas para estos proyectores.

Palabras clave: Cadenas binarias, proyectores canónicos, funciones booleanas recursivas, biyección combinatoria, base canónica.
Clasificación MSC: 05A05, 15A03, 94C10, 68R05.

1. Introducción

En álgebra lineal y teoría de códigos, es frecuente buscar representaciones combinatorias de estructuras algebraicas. Este trabajo explora la relación entre cadenas binarias con restricciones de orden y la base canónica de espacios euclídeos. Específicamente, estudiamos el conjunto F_n de cadenas binarias no

crecientes de longitud n y su conexión con los proyectores sobre coordenadas en $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Definiciones básicas

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos:

- **Conjunto de cadenas no crecientes:**

$$F_n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^n \mid x_0 \geq x_1 \geq \cdots \geq x_{n-1}\}$$

- **Base canónica como conjunto:**

$$G_n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^n \mid x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} = 1\}$$

  Es decir, $G_n = \{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$, donde e_i es el vector con 1 en la posición i y 0 en las demás.

El conjunto F_n tiene exactamente $n+1$ elementos, correspondientes a las posibles cantidades de unos iniciales: para $k = 0, 1, \ldots, n$, la cadena tiene k unos seguidos de $n-k$ ceros.

3. La transformación $H_n : F_n \to G_{n+1}$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función:

$$H_n : F_n \to G_{n+1}$$

$$H_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = (f_{n,0}(x_0, \ldots, x_{n-1}), \ldots, f_{n,n}(x_0, \ldots, x_{n-1}))$$

donde las funciones $f_{n,k} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ se definen recursivamente en la siguiente sección.

3.1. Casos base

Para $n = 1$:

$$H_1(0) = (0,1) = (f_{1,0}(0), f_{1,1}(0))$$
$$H_1(1) = (1,0) = (f_{1,0}(1), f_{1,1}(1))$$

donde:

$$f_{1,0}(x_0) = x_0, \quad f_{1,1}(x_0) = 1 - x_0$$

Para $n = 2$:

$$\begin{aligned} H_2(0,0) &= (0,0,1) = (f_{2,0}(0,0), f_{2,1}(0,0), f_{2,2}(0,0)) \\ H_2(1,0) &= (0,1,0) = (f_{2,0}(1,0), f_{2,1}(1,0), f_{2,2}(1,0)) \\ H_2(1,1) &= (1,0,0) = (f_{2,0}(1,1), f_{2,1}(1,1), f_{2,2}(1,1)) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} f_{2,0}(x_0,x_1) &= x_1 = f_{1,0}(x_1) \\ f_{2,1}(x_0,x_1) &= (1-x_1)x_0 = (1 - f_{2,0}(x_0,x_1))f_{1,0}(x_0) \\ f_{2,2}(x_0,x_1) &= (1-x_1)(1-x_0) = (1 - f_{2,0}(x_0,x_1))f_{1,1}(x_0) \end{aligned}$$

Para $n = 3$:

$$\begin{aligned} H_3(0,0,0) &= (0,0,0,1) \\ H_3(1,0,0) &= (0,0,1,0) \\ H_3(1,1,0) &= (0,1,0,0) \\ H_3(1,1,1) &= (1,0,0,0) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} f_{3,0}(x_0,x_1,x_2) &= x_2 = f_{2,0}(x_1,x_2) \\ f_{3,1}(x_0,x_1,x_2) &= (1-x_2)x_1 = (1 - f_{3,0}(x_0,x_1,x_2))f_{2,0}(x_0,x_1) \\ f_{3,2}(x_0,x_1,x_2) &= (1-x_2)(1-x_1)x_0 = (1 - f_{3,0}(x_0,x_1,x_2))f_{2,1}(x_0,x_1) \\ f_{3,3}(x_0,x_1,x_2) &= (1-x_2)(1-x_1)(1-x_0) = (1 - f_{3,0}(x_0,x_1,x_2))f_{2,2}(x_0,x_1) \end{aligned}$$

4. Definición recursiva de $f_{n,k}$

Para $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq n$, definimos $f_{n,k} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ recursivamente como:

$$f_{n,k}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \begin{cases} x_{n-1}, & \text{si } k = 0 \\ (1 - x_{n-1}) f_{n-1,k-1}(x_0, \ldots, x_{n-2}), & \text{si } 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

con la condición inicial $f_{1,1}(x_0) = 1 - x_0$.

[Fórmula cerrada] Para $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq n$, se tiene:

$$f_{n,k}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \begin{cases} x_{n-1}, & k = 0 \\ \left(\prod_{j=n-k}^{n-1} (1 - x_j) \right) x_{n-k-1}, & 1 \leq k \leq n-1 \\ \prod_{j=0}^{n-1} (1 - x_j), & k = n \end{cases}$$

Demostración. Por inducción sobre n. Para $n = 1$ se verifica directamente. Suponiendo válido para $n - 1$, para n:

- Si $k = 0$: por definición $f_{n,0} = x_{n-1}$.
- Si $1 \leq k \leq n - 1$:

$$\begin{aligned} f_{n,k} &= (1 - x_{n-1}) f_{n-1,k-1}(x_0, \ldots, x_{n-2}) \\ &= (1 - x_{n-1}) \left[\left(\prod_{j=(n-1)-(k-1)}^{n-2} (1 - x_j) \right) x_{(n-1)-(k-1)-1} \right] \\ &= (1 - x_{n-1}) \left[\left(\prod_{j=n-k}^{n-2} (1 - x_j) \right) x_{n-k-1} \right] \\ &= \left(\prod_{j=n-k}^{n-1} (1 - x_j) \right) x_{n-k-1} \end{aligned}$$

- Si $k = n$:

$$\begin{aligned} f_{n,n} &= (1 - x_{n-1}) f_{n-1,n-1}(x_0, \ldots, x_{n-2}) \\ &= (1 - x_{n-1}) \prod_{j=0}^{n-2} (1 - x_j) \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} (1 - x_j) \end{aligned}$$

□

Para $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in F_n$, exactamente una de las funciones $f_{n,k}$ toma el valor 1, y las demás son 0.

5. Propiedades de la transformación H_n

H_n es una biyección entre F_n y G_{n+1}.

Demostración. Dada $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in F_n$, sea $k = \sum_{i=0}^{n-1} x_i$ el número de unos. Como la cadena es no creciente, los unos están al principio. Entonces:

- $x_{n-1} = 0$ si $k < n$
- Para $0 \leq r \leq n - k - 1$: $x_{n-1-r} = 0$
- $x_{n-k-1} = 1$ si $k > 0$

Por la fórmula del Teorema 4.2, $f_{n,n-k}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = 1$ y $f_{n,j} = 0$ para $j \neq n - k$. Así, $H_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = e_{n-k} \in G_{n+1}$.

La correspondencia $k \mapsto n - k$ es biyectiva entre $\{0, 1, \ldots, n\}$ y sí mismo. □

Si $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in F_n$ tiene k unos, entonces $H_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = e_{n-k}$.

6. Proyectores canónicos

Para $0 \leq k \leq n$, definimos el proyector $P_k^{(n+1)} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ como sigue: sea $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in F_n$ la única cadena con k unos (es decir, tal que $H_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = e_{n-k}$). Entonces:

$$P_k^{(n+1)}(y_0, \ldots, y_n) = (y_0, \ldots, y_n) \cdot H_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = y_{n-k}$$

Equivalentemente, $P_k^{(n+1)}$ es la proyección sobre la coordenada $n - k$:

$$P_k^{(n+1)}(y_0, \ldots, y_n) = y_{n-k}$$

Los proyectores $P_k^{(n+1)}$ satisfacen:

1. $P_k^{(n+1)}(e_j) = \delta_{j,n-k}$ donde δ es la delta de Kronecker.
2. Para cualquier $y \in \mathbb{R}^{n+1}$, se tiene $y = \sum_{k=0}^{n} P_k^{(n+1)}(y) e_{n-k}$.
3. $P_k^{(n+1)}$ es lineal y acotado con norma 1.

7. Interpretación combinatoria y aplicaciones

La construcción presentada tiene varias interpretaciones interesantes:

7.1. Interpretación como sistema de decisión

Las funciones $f_{n,k}$ pueden verse como un sistema de decisión por etapas que lee la cadena de derecha a izquierda:

1. Si $x_{n-1} = 1$, el proceso termina y selecciona $k = 0$.
2. Si $x_{n-1} = 0$, se considera x_{n-2}, y así sucesivamente.
3. El índice k cuenta cuántos ceros consecutivos hay al final antes de encontrar un 1 (o llegar al inicio).

7.2. Conexión con caminos en el hipercubo

El conjunto F_n puede equiparse con una estructura de grafo donde dos cadenas son adyacentes si difieren en exactamente un bit. La transformación H_n envía este grafo a la estrella completa con centro en algún vértice de G_{n+1}.

7.3. Aplicaciones potenciales

- **Codificación:** La biyección H_n proporciona un código que transforma palabras de longitud n con restricción de orden en vectores de la base canónica.
- **Procesamiento de señales:** Los proyectores $P_k^{(n+1)}$ pueden usarse en descomposiciones espectrales donde las componentes corresponden a patrones binarios específicos.
- **Aprendizaje automático:** Las funciones $f_{n,k}$ son ejemplos de circuitos booleanos de profundidad $O(n)$ que computan funciones características de intervalos.

8. Generalizaciones y trabajo futuro

1. **Cadenas crecientes:** Puede definirse una construcción dual usando $F_n^{\uparrow} = \{(x_0, \ldots, x_{n-1}) \mid x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1}\}$.

2. **Dominios multivariados:** Extender la construcción a alfabetos mayores $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ con condiciones de monotonicidad.

3. **Aplicaciones en teoría de representación:** Estudiar la acción del grupo simétrico sobre estas construcciones.

4. **Conexiones con polinomios de Bernstein:** Los proyectores $P_k^{(n+1)}$ se relacionan naturalmente con polinomios de Bernstein:

$$B_k^n(t) = nkt^k(1-t)^{n-k} = nk \cdot P_k^{(n+1)}(1, t, t^2, \ldots, t^n) \cdot (1-t)^{n-k}$$

   Esta conexión sugiere generalizaciones de polinomios de Bernstein a bases p-arias.

9. Conclusión

Hemos presentado una construcción recursiva que establece una biyección explícita entre cadenas binarias no crecientes y la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Mediante funciones booleanas $f_{n,k}$ definidas recursivamente, obtenemos una representación combinatoria de los proyectores coordenados. La fórmula cerrada para $f_{n,k}$ revela la estructura subyacente: el producto de términos $(1-x_j)$ que çuentançeros al final de la cadena. Esta construcción une conceptos de combinatoria, álgebra lineal y teoría de funciones booleanas, ofreciendo perspectivas para aplicaciones en codificación y procesamiento de señales.